04/03/19

Διαγωνοποίηση:

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$T(x,y,z) = (\lambda_1 x, \lambda_2 y, \lambda_3 z)$

$T(1,0,0) = (\lambda_1, 0, 0)$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$M(n\times n, \mathbb{R})$ $\dim M = n^2$

$A \in M(n\times n, \mathbb{R})$

$\{I, A, A^2 = A\cdot A, A^3, A^4, \dots\} \subseteq M(n\times n, \mathbb{R})$

κ' Άρα $\exists \kappa \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\{I, A, A^2, \dots, A^{\kappa-1}\}$ γραμ. ανεξ. κ'

$\{I, A, \dots, A^{\kappa-1}, A^\kappa\}$ γραμ. εξ $\Longleftrightarrow$

$A^\kappa + a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_{\kappa-1} A^{\kappa-1} = O_{n\times n}$

$A^\kappa = -a_0 I - a_1 A - a_2 A^2 - \dots - a_{\kappa-1} A^{\kappa-1}$

$A^{\kappa+1} = A A^\kappa = -a_0 A - a_1 A^2 - a_2 A^3 - \dots - a_{\kappa-1} A^\kappa =$

$= -a_0 A - a_1 A^2 - \dots - a_{\kappa-2} A^{\kappa-1} - a_{\kappa-1} A^\kappa - a_{\kappa-1}(-a_0 I - a_1 A - \dots - a_{\kappa-1} A^{\kappa-1})$

$\rightarrow f(x) = x^\kappa + a_{\kappa-1} x^{\kappa-1} + a_{\kappa-2} x^{\kappa-2} + \dots + a_1 x + a_0$

$f(A) = A^\kappa + a_{\kappa-1} A^{\kappa-1} + a_{\kappa-2} A^{\kappa-2} + \dots + a_1 A + a_0$

Απέδειξα ότι $\forall$ πίνακα A υπάρχει ένα πολυώνυμο ώστε αν στη θέση του x βάλω τον πίνακα A να μας δίνει τον μηδενικό πίνακα, θα λέγεται ότι ο A μηδενίζει το συγκεκριμένο πολυώνυμο

• ΟΡΙΣΜΟΣ: Το πολυώνυμο με συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου την μονάδα κ' με ελάχιστο δύναμη ώστε να μηδενίζεται από τον A θα καλείται ελάχιστο πολυώνυμο του A.

Συμβολισμός: $m_A(x)$ ή $m_A(\lambda)$ με $m_A(A) = O_{n\times n}$

$m_A(x) = x^\kappa + a_{\kappa-1} x^{\kappa-1} + \dots + a_0$ με ελάχιστο βαθμό ώστε

• ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν $f(x)$ είναι πολυώνυμο ώστε $f(A) = O_{n\times n}$, τότε το $f(x)$ διαιρείται από το ελάχιστο πολυώνυμο του A, δηλ $f(x) = m_A(x)\, g(x)$.

* Απόδειξη: $\deg(m_A(x)) \le \deg(f(x))$ εξ ορισμού.. ΑΔΥΝΑΤΟ

Ε.Δ. : $f(x) = m_A(x) g(x) + u(x)$ με $u(x) = 0$ ή $\deg(u(x)) \le \deg(m_A(x))$

$\left.\begin{array}{l} f(A) = m_A(A) g(A) + u(A) \\ f(A) = O_{n\times n} = m_A(A) \end{array}\right\} \Rightarrow u(A) = O_{n\times n}$ $\deg(u(x)) < \deg(m_A(x))$

Άρα $u(x) = 0$, δηλ. $f(x) = m_A(x) g(x)$

• **ΘΕΩΡΗΜΑ Cayley-Hamilton:**
Αν $\chi_A(\lambda)$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A, τότε $\chi_A(A) = O_{n\times n}$. Άρα το ελάχιστο πολυώνυμο διαιρεί το χαρακτηριστικό & $\deg(m_A(x)) \leq n = \deg(\chi_A(x))$

• **ΠΡΟΤΑΣΗ:** Το χαρακτηριστικό & το ελάχιστο πολυώνυμο ενός πίνακα A έχουν τις ίδιες ρίζες.

* **Απόδειξη:** Οι ιδιοτιμές είναι οι ρίζες του $\chi_A(\lambda)$ $Au_i = \lambda_i u_i$ με $i=1,\dots,k$. Έστω $m_A(\lambda) = \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ ελάχιστο πολυώνυμο του A. $m_A(A) = O_{n\times n}$.

Δ.Ο. $m_A(\lambda_i) = 0 \Leftrightarrow \lambda_i$ ρίζα του $m_A(\lambda)$ για $i=1,\dots,k$

$m_A(A) = O_{n\times n} \Leftrightarrow A^m + a_{m-1}A^{m-1} + \dots + a_1 A + a_0 I = O_{n\times n} \Rightarrow$

$\Rightarrow (A^m + a_{m-1}A^{m-1} + \dots + a_1 A + a_0 I)u_i = O_{n\times n}u_i \Rightarrow$

$\Rightarrow A^m(u_i) + a_{m-1}A^{m-1}(u_i) + \dots + a_1 A(u_i) + a_0 u_i = O_{n\times n} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_i^m u_i + a_{m-1}\lambda_i^{m-1}u_i + \dots + a_1\lambda_i u_i + a_0 u_i = O_{n\times n} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{(\lambda_i^m + a_{m-1}\lambda_i^{m-1} + \dots + a_1\lambda_i + a_0)}_{\text{αριθμός}} \underset{\neq 0}{u_i} = O_{n\times n} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_i^m + a_{m-1}\lambda_i^{m-1} + \dots + a_1\lambda_i + a_0 = 0$

Άρα $m_A(\lambda_i) = 0 \Leftrightarrow$ το λ_i είναι ρίζα & του ελάχιστου πολ.

πχ: $f(x) = (x+1)^2(x-1)(x-\sqrt{3})^5(x-e)^7$

ρίζες: $\underset{2}{-1}$, $\underset{1}{1}$, $\underset{5}{\sqrt{3}}$, $\underset{7}{e}$

$g(x) = (x+1)(x-1)(x-\sqrt{3})(x-e)$

Το $g(x)$ έχει τις ίδιες ρίζες με το $f(x)$ & το μικρότερο βαθμό

• **ΠΡΟΤΑΣΗ:** Όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο

* **Απόδειξη:** Έστω $A = PBP^{-1}$ (1) & $m_A(\lambda)$ & $m_B(\lambda)$ τα αντίστοιχα ελάχιστα πολυώνυμα. Έστω ότι $m_A(\lambda) = \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ & $m_A(A) = O_{n\times n} \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$A^m + a_{m-1}A^{m-1} + \dots + a_1 A + a_0 I = O_{n\times n} \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow (PBP^{-1})^m + a_{m-1}(PBP^{-1})^{m-1} + \dots + a_1 PBP^{-1} + a_0 PIP^{-1} = O_{n\times n} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(B^m + a_{m-1}B^{m-1} + \dots + a_1 B + a_0 I)P^{-1} = O_{n\times n} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P^{-1}P(\text{—} \;\; , \;\; , \;\; \text{—})P^{-1}P = P^{-1}O_{n\times n}P \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\text{—} \;\; , \;\; , \;\; \text{—}) = O_{n\times n}$

$m_A(B) = O_{n\times n} \Rightarrow m_B(\lambda) \mid m_A(\lambda)$

Ακριβώς με τον ίδιο τρόπο δείχνω ότι $m_A(\lambda) \mid m_B(\lambda)$

Άρα $m_A(\lambda) = m_B(\lambda)$, διότι είναι μονικά (μεγιστοβάθμιος η μονάδα)

● ΠΟΡΙΣΜΑ: Έστω $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ένας ενδομορφισμός. Τότε ορίζεται το χαρακτηριστικό κ' το ελάχιστο πολυώνυμο του μέσω εκείνων κάποιου πίνακα του σε κάποια βάση.

● ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $T: V^n \to V^n$ ένας ενδομορφισμός κ' A ο πίνακας του ως προς κάποια βάση. Ο A διαγωνοποιείται (αντίστοιχα κ' ο T) αν-ν το ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(\lambda)$ του A είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων πολυωνύμων με διαφορετικές ρίζες.

ΔΗΛ. $m_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_k)$ ώστε $\lambda_i \neq \lambda_j \; \forall i \neq j$ κ' $i,j = 1, \dots, k$.

ΌΧΙ: $m_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{m_k}$ κ' κάποιο $m_i > 1$.

ΠΧ. Να εξετασεί αν διαγωνοποιείται ο $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ κ' να γραφεί ο A^{-1} σαν γραμ. συνδυασμός των I, A κ' A^2

$$\chi_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)^2$$

κ' $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 2$

Πιθανά ελάχιστα του A: $(\lambda-1)(\lambda-2)$, $(\lambda-1)^2(\lambda-2)$, $(\lambda-1)(\lambda-2)^2$, $\chi_A(\lambda)$

Ο A θα διαγωνοποιείται $\Leftrightarrow m_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)$

Πρέπει $m_A(A) = (A-I)(A-2I) = O_{4\times4}$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&\cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\ &&&\\ &&&\end{pmatrix}\neq O_{4\times4}$$

~~Άρα $m_A(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)=(\lambda^2-2\lambda+1)(\lambda-2)$~~

Άρα $m_A(\lambda)\neq(\lambda-1)(\lambda-2)$

$(\lambda-1)^2(\lambda-2)=(A-I)^2(A-2I)=(A-I)(A-I)(A-2I)=$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=O_{4\times4}$$

Άρα $m_A(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)=(\lambda^2-2\lambda+1)(\lambda-2)$

$\exists A^{-1}$ αφού $\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3\cdot\lambda_4=1\cdot1\cdot2\cdot2=4\neq0$

$m_A(\lambda)=\lambda^3-2\lambda^2+\lambda-2\lambda^2+4\lambda-2=\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2$

$A^3-4A^2+5A-2I=O_{4\times4}\Leftrightarrow A^3-4A^2+5A=2I\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A^{-1}(A^3-4A^2+5A)=2A^{-1}\Leftrightarrow A^{-1}=\frac{A^2}{2}-2A+\frac{5}{2}I$

παρ. 2) Παρ. Αν $A=\begin{pmatrix}-2&3\\-1&2\end{pmatrix}$ να βρεθούν το χαρακτηριστικό κ' ελάχιστο πολυώνυμο του A κ' να υπολογιστεί η παράσταση: $A^{202}-3A^{147}+2I$ κ' ο A^{-1}.

$\chi_A(\lambda)=\det\begin{pmatrix}-2-\lambda&3\\-1&2-\lambda\end{pmatrix}=\lambda^2-4+3=\lambda^2-1$ $\quad\lambda_1=1\quad\lambda_2=-1\Rightarrow$

A διαγωνοποιείται κ' $m_A(\lambda)=\chi_A(\lambda)=\lambda^2-1\Rightarrow A^2-I=O_{2\times2}\Rightarrow$

$\Rightarrow A^2=I\Rightarrow A^{-1}=A$

$A^2=I\Rightarrow A^3=A\qquad A^{2k}=I$ κ' $A^{2k+1}=A$

$A^{202}=A^{2\cdot101}=I\qquad A^{147}=A\cdot A^{146}=A$

$A^{202}-3A^{147}+2I=I-3\cdot A+2I=3I-3A=3(I-A)=3\begin{pmatrix}3&-3\\1&-1\end{pmatrix}$